Mathématiques générales - 1982 X oui

Série 10 (Devoir n° 5)

Exercice 1 Former l'équation admettant pour racines les différentes valeurs du rapport anharmonique de quatre nombres donnés.

Exercice 2 Résoudre l'équation

$$x^5 - 209x + 56 = 0$$

sachant que le produit de deux racines est égal à 1.

Problème

Rappels.

6325 . On rappelle que, pour n et k entiers naturels,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

et que, par convention, $0! = 1$. Les candidats pourront utiliser la notation C_n^k si elle leur est plus familière. La notation $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers positifs ou nuls (entiers naturels).

Objet du problème.

Soit K un corps commutatif de caractéristique nulle. Dans tout le problème, $\mathscr{P}$ désigne l'algèbre $K[x]$ des polynômes à une indéterminée et à coefficients dans K. On note $\mathscr{P}^*$ le dual de $\mathscr{P}$, c'est-à-dire l'espace vectoriel des formes linéaires sur $\mathscr{P}$. Si L appartient à $\mathscr{P}^*$ et p à $\mathscr{P}$, on note $\langle L, p\rangle$ la valeur de L en p.

Une *suite polynômiale* $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{P}$ tels que, pour tout n, le polynôme p_n soit exactement de degré n. En particulier p_0 est un polynôme constant non nul. On remarquera que les éléments d'une telle suite forment une base de $\mathscr{P}$.

Une *suite binomiale* est une suite polynomiale $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout n, on ait, dans $K[x, y]$ l'identité

$$p_n(x + y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k(x)p_{n-k}(y).$$

Par exemple, la suite $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est binomiale.

L'objet du problème est l'étude des suites binomiales. Toutefois ces suites n'interviennent pas dans la premiere partie.

PREMIÈRE PARTIE.

Pour tout élément a de K, on note ε_a l'élément de $\mathscr{P}^*$ défini par

$$\langle \varepsilon_a, p \rangle = p(a) \qquad \text{pour tout } p \in \mathscr{P}$$

et l'on pose $\varepsilon = \varepsilon_0$.

Soit L et M deux éléments de $\mathscr{P}^*$ et $L \otimes M$ la forme linéaire sur $K[x, y]$ définie par

$$\langle L \otimes M, x^i y^j \rangle = \langle L, x^i \rangle \langle M, y^j \rangle \qquad \text{pour } i, j \in \mathbb{N}.$$

On appelle produit de L et de M et on note LM, la forme linéaire sur $\mathscr{P}$ définie par

$$\langle LM, p \rangle = \langle L \otimes M, p(x + y) \rangle \qquad \text{pour tout } p \in \mathscr{P}.$$

En particulier si $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite binomiale, on a

$$\langle LM, p_n \rangle = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \langle L, p_k \rangle \langle M, p_{n-k} \rangle.$$

Muni de ce produit, l'espace vectoriel $\mathscr{P}^*$ est une algèbre associative sur K (on ne demande pas de vérifier cette assertion).

1° Démontrer que l'algèbre $\mathscr{P}^*$ admet ε comme élément unité et que, pour a et b éléments de K, on a $\varepsilon_a \varepsilon_b = \varepsilon_{a+b}$.

2° Si L est un élément non nul de $\mathscr{P}^*$, on note $\nu(L)$ le plus petit entier n tel que $\langle L, x^n \rangle$ soit non nul. On pose

$$|L| = 2^{-\nu(L)}$$

et $|0| = 0$.

a) Démontrer, pour L et M appartenant à $\mathscr{P}^*$, que

$$|L + M| \leqslant \sup(|L|, |M|) \quad \text{et} \quad |LM| = |L|\,|M|.$$

b) Soit, pour L et M appartenant à $\mathscr{P}^*$, $d(L, M) = |L - M|$; démontrer que d est une distance sur $\mathscr{P}^*$. On munit $\mathscr{P}^*$ de la topologie associée à d et K de la topologie discrète (toute partie de K est donc ouverte). On munit $\mathscr{P}^* \times \mathscr{P}^*$ et $K \times \mathscr{P}^*$ des topologies produits correspondantes. Établir, pour L et M appartenant à $\mathscr{P}^*$ et a appartenant à K, la continuité des applications

$$(L, M) \mapsto L + M, \quad (L, M) \mapsto LM \quad \text{et} \quad (a, L) \mapsto aL.$$

De même, p étant un élément fixé de $\mathscr{P}$, démontrer que l'application

$$L \mapsto \langle L, p \rangle$$

de $\mathscr{P}^*$ dans K est continue.

c) Démontrer que $\mathscr{P}^*$ est complet.

3° Soit $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{P}^*$. Démontrer que la série de terme général L_n est convergente si et seulement si la suite $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.

4° Soit L un élément de $\mathscr{P}^*$. Démontrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes

i) $\langle L, 1 \rangle = 0$;

ii) La suite $(L^n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0;

iii) Pour toute suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de K, la série de terme général $a_n L^n$ est convergente.

(On convient, pour L appartenant à $\mathscr{P}^*$, que $L^0 = \varepsilon$; de même, si a appartient à K, on a $a^0 = 1$).

5° Soit L un élément non nul de $\mathscr{P}^*$, et posons $\nu(L) = m$. Démontrer que, pour tout entier naturel k, on a $\nu(L^k) = km$

et que
$$\langle L^k, x^{km} \rangle = \frac{(km)!}{(m!)^k} \langle L, x^m \rangle^k.$$

6° On rappelle que, n et k étant deux entiers naturels,

$$\delta_{n,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = k \\ 0 & \text{si } n \neq k \end{cases}$$

Soit A l'élément de $\mathscr{P}^*$ défini par

$$\langle A, x^n \rangle = \delta_{n,1} \qquad \text{pour } n \in \mathbb{N}.$$

Démontrer que, pour n et k entiers naturels, on a

$$\langle A^k, x^n \rangle = k\,!\ \delta_{n,k}.$$

Pour un polynôme p, que représente $\langle A^k, p \rangle$?

Deuxième partie.

On note $\mathscr{P}_0^*$ l'ensemble des éléments non nuls L de $\mathscr{P}^*$ tels que $v(L) = 1$.

1° *a*) Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite binomiale. Montrer que $p_0 = 1$ et que, pour n non nul, on a $p_n(0) = 0$.

b) Démontrer qu'une suite polynomiale $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est binomiale si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout a et b appartenant à K, on a

$$\langle \varepsilon_a \varepsilon_b, p_n \rangle = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \langle \varepsilon_a, p_k \rangle \langle \varepsilon_b, p_{n-k} \rangle.$$

2° Soit L un élément de $\mathscr{P}_0^*$. Démontrer que si un polynôme p vérifie, pour tout entier naturel k,

$$\langle L^k, p \rangle = 0$$

alors $p = 0$. Démontrer qu'il existe une unique suite polynomiale $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout n et k entiers naturels, on ait

$$\langle L^k, p_n \rangle = k\,!\ \delta_{n,k}.$$

On dit que la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la *suite associée* à L.

3° Soit L un élément de $\mathscr{P}_0^*$ et $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite associée. Soit M un élément de $\mathscr{P}^*$. Démontrer qu'il existe une unique suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de K telle que

$$M = \sum_{k=0}^{\infty} a_k L^k$$

et que

$$a_k = \frac{\langle M, p_k \rangle}{k\,!} \qquad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

4° Démontrer que, si M et N sont deux éléments de $\mathscr{P}^*$ et L un élément de $\mathscr{P}_0^*$ de suite associée $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, alors

$$\langle MN, p_n \rangle = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \langle M, p_k \rangle \langle N, p_{n-k} \rangle.$$

(On pourra commencer par le cas où M et N sont des puissances de L).

5° Démontrer que la suite associée à un élément de $\mathscr{P}_0^*$ est binomiale et qu'inversement toute suite binomiale est la suite associée à un unique élément de $\mathscr{P}_0^*$.

6° *a*) Soit L un élément de $\mathscr{P}_0^*$ et, pour tout entier naturel n,

$$q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle L^k, x^n \rangle}{k\,!} x^k.$$

Démontrer que la suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est binomiale (on pourra revenir à la définition d'une suite binomiale).

b) Démontrer qu'inversement toute suite binomiale s'obtient de cette manière à partir d'un unique élément de $\mathscr{P}_0^*$.

c) Pour tout élément M de $\mathscr{P}_0^*$, de suite associée $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, il existe ainsi un unique élément $\tilde{M}$ de $\mathscr{P}_0^*$ tel que, pour tout entier naturel n, on ait

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle \tilde{M}^k, x^n \rangle}{k\,!} x^k.$$

On dit que $\tilde{M}$ est le *conjugué* de M. Calculer $\tilde{A}$.

Troisième partie.

1° *a*) Soit T une application linéaire de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$; on note T^* l'application linéaire de $\mathscr{P}^*$ dans $\mathscr{P}^*$ transposée de T. Démontrer que T^* est continue.

b) Soit U une application linéaire continue de $\mathscr{P}^*$ dans $\mathscr{P}^*$. Démontrer que, pour tout polynôme p, il existe un unique polynôme q tel que, pour tout entier naturel k, l'on ait

$$\langle U(A^k), p\rangle = \langle A^k, q\rangle .$$

En déduire que U est la transposée d'une application linéaire de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$.

2° Soit L un élément de $\mathscr{P}_0^*$ et $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite associée.

a) Soit α_L l'application linéaire de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ définie par

$$\alpha_L(x^n) = p_n \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Déterminer $\alpha_L^*(L^k)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

b) Soit $\mathscr{A}$ l'ensemble des α_L pour L appartenant à $\mathscr{P}_0^*$. Démontrer qu'une application linéaire α de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ appartient à $\mathscr{A}$ si et seulement si α^* est un isomorphisme algébrique et topologique de l'*algèbre* $\mathscr{P}^*$ sur elle-même.

c) Soit θ_L l'application linéaire de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ définie par

$$\theta_L(p_n) = p_{n+1} \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Une dérivation de $\mathscr{P}^*$ est une application linéaire ∂ de $\mathscr{P}^*$ dans $\mathscr{P}^*$ telle que, pour tout M et N appartenant à $\mathscr{P}^*$, ont ait

$$\partial(MN) = M\,\partial(N) + \partial(M)N.$$

Démontrer que θ_L^* est une dérivation surjective de $\mathscr{P}^*$ et qu'inversement, pour toute dérivation continue surjective ∂ de $\mathscr{P}^*$, il existe un élément L de $\mathscr{P}_0^*$ tel que $\partial = \theta_L^*$. On pose

$$\partial_L = \theta_L^*.$$

Calculer $\partial_L(L^k)$ pour k entier naturel et préciser le noyau de ∂_L.

3° Soit α une application linéaire de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ et soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite binomiale quelconque. Démontrer que α appartient à $\mathscr{A}$ si, et seulement si, la suite $(\alpha(p_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est binomiale.

4° *a*) Soit L et M deux éléments de $\mathscr{P}_0^*$. Démontrer qu'il existe un unique élément de $\mathscr{P}_0^*$, noté $L \circ M$, tel que

$$\alpha_{L\circ M} = \alpha_L \circ \alpha_M .$$

b) Démontrer que $\mathscr{P}_0^*$, muni de la loi $\circ$ que l'on vient de définir, est un groupe. Quel est son élément neutre ?

c) Soit L et M deux éléments de $\mathscr{P}_0^*$ et soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites respectivement associées à L, M et $L\circ M$. Démontrer que si

$$q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_{n,k}x^k \quad \text{alors} \quad r_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_{n,k}\,p_k(x).$$

5° Soit L un élément de $\mathscr{P}_0^*$ et $\mathrm{Ł}$ son conjugué (cf. deuxième partie, 6° *c*). Montrer que $\mathrm{Ł} \circ L = A$. Quel est le conjugué de $\mathrm{Ł}$?

6° Soit L et M deux éléments de $\mathscr{P}_0^*$. Démontrer que si

$$M = \sum_{k=1}^{\infty} b_k A^k \qquad b_k \in K, \text{ pour tout } k,$$

alors

$$L \circ M = \sum_{k=1}^{\infty} b_k L^k .$$

Quatrième partie.

1° Soit L un élément de $\mathscr{P}^*$.

a) Démontrer qu'il existe une unique application linéaire μ_L de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ telle que, pour tout élément M de $\mathscr{P}^*$ et tout élément p de $\mathscr{P}$, on ait

$$\langle LM, p\rangle = \langle M, \mu_L(p)\rangle$$

b) Déterminer μ_A et, pour $a \in K$, déterminer μ_{ε_a}. On pose $D = \mu_A$.

c) L et M étant deux éléments de $\mathscr{P}^*$, déterminer $\mu_L + \mu_M$ et $\mu_L \circ \mu_M$.